Mathematische Probleme lösen

Problem verstehen

Hier beginnen!

... und im Uhrzeigersinn weitermachen

- Skizzen anfertigen
- Bezeichnungen einführen
- Problem darstellen
- Material sammeln
  - Untersuchung von ...
    - Spezialfällen
      - Extremfällen
      - Grenzfällen
  - systematisch untersuchen
    - Tabellen anlegen
    - Welche Variablen gibt es?
- nach Ähnlichkeiten suchen
  - ähnliche Probleme
  - ähnliche Fragestellungen

Anwendungsrezept

- Kombiniere...
  - Objekte
  - +
  - Aktionen

Lösungsideen sammeln

Objekte:

Mit welchen Objekten habe ich zu tun?

- Bestandteile des Problems
  - gegebene Größen
  - Voraussetzungen / Bedingungen
  - gesuchte Größen
- Darstellungen des Problems
  - geometrisch
    - Koordinatensysteme
      - Kugel
      - Polar
      - Zylinder
  - algebraisch
    - Zahlensysteme
    - Zahldarstellungen
  - algorithmisch
    - Schritt-für-Schritt
- mathematische Gegenstände
  - Mengen / Zahlen / Folgen / Funktionen / Vektoren usw.
  - Relationen
    - Gleichungen / Ungleichungen
  - verfügbare Sätze / Aussagen
- mathematische Allzweckwerkzeuge
  - komplexe Zahlen
  - Reihen
  - Hilfsfunktionen
    - charakteristische Funktionen
- Beweistechniken
  - direkter Beweis
  - Widerspruch
  - Induktion
- Ausgangspunkt der Suche
  - Ausgangspunkt des Problems
  - Zwischenpunkt
  - Zielpunkt des Problems
- Suchrichtung
  - vorwärts / rückwärts
- Suchvorgang
  - Ansätze sammeln
  - einzelnen Ansatz auswerten
- Objekte-Liste erweitern?!

Aktionen:

Wie kann ich die Objekte analysieren und manipulieren?

- Standardtechniken zu den Objekten anwenden
  - => spezielle Maps anfertigen
- analysieren
  - Betrachtung von ...
    - Spezialfällen
      - Extremfällen
      - Grenzfällen
  - systematisch Daten sammeln
  - Suche nach ...
    - Mustern
      - Symmetrien
    - unveränderlichen Größen / Invarianten
  - mit mehr Details / mit weniger Details
- manipulieren
  - anders anordnen
    - erzeuge ...
      - Muster
      - Symmetrien
  - hinzufügen / weglassen
    - vervielfältigen
  - vergrößern / verkleinern
    - $\to \pm\infty$
    - $\to 0$
  - austauschen, ersetzen
  - umkehren / vertauschen / invertieren
  - zusammensetzen / kombinieren
- kommunizieren
  - mit anderen reden / andere um Rat fragen
  - Literatur
  - Internet
    - Suchmaschinen / Newsgroups / Postings in Foren / E-Mail an Experten / Datenbanken
- Aktionen-Liste erweitern?!

auf Abstand gehen!

Sehr wichtig!

durchgehend anwenden!

- Wo liegt im Augenblick die Schwierigkeit?
  - allgemeines Rezept
    - Liste der Objekte durchgehen
      - mögliche Aktionen zu diesem Objekt?
      - anderes Objekt wählen?
    - Liste der Aktionen durchgehen
      - andere Aktion wählen?
  - Schwierigkeiten aufspüren
    - Teile des Problems unklar
    - Wissen über das Thema fehlt
    - Problem ungünstig dargestellt
    - geeigneter Lösungsansatz fehlt
    - vorhandene Ansätze nicht gründlich ausgewertet
    - falsche Annahmen
      - Abhilfe
        - 1. Annahmen auflisten
        - 2. Jede Annahme umkehren
        - 3. Schlussfolgerungen ziehen
    - sich in einen Ansatz verbeißen
      - nach Lösungen in einem größeren Gebiet suchen
      - den Ansatz eine Zeitlang bewusst aufgeben
    - umherirren
      - systematischer vorgehen
      - Vorgehen planen
  - Was würde X tun?
    - X =
      - Dozent
      - Mitstudenten
      - berühmter Mathematiker

Lösung prüfen

- Lösung...
  - plausibel?
  - richtig?
  - bewiesen?
  - unmittelbar einsichtig?
- Anwendung auf ...
  - Spezialfälle
  - Extremfälle
- andere Herleitung?
- Übertragung möglich?
  - ... des Ergebnisses?
  - ... der Methode?

Lösungsplan durchführen

- Sorgfältig arbeiten!
- Jeden Schritt prüfen!
  - plausibel?
  - richtig?
  - bewiesen?

Lösungsplan zusammenstellen

- ... Schritt 1
- ... Schritt 2
- ...